ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΕΤΑΡΤΗ 3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2026
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 133

Αρκεί να δείξουμε ότι $f(x_1) = f(x_2)$ για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$.

- Αν $x_1 = x_2$ τότε $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$ τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ., άρα υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

  Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, θα είναι $f'(\xi) = 0$

  άρα $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 \Leftrightarrow f(x_2) - f(x_1) = 0 \Leftrightarrow f(x_2) = f(x_1)$
- Αν $x_1 > x_2$ τότε όμοια εφαρμόζοντας Θ.Μ.Τ. στο $[x_2, x_1]$ αποδεικνύουμε ότι $f(x_1) = f(x_2)$.

Επομένως σε κάθε περίπτωση $f(x_1) = f(x_2)$.

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 51

Κριτήριο παρεμβολής

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h. Αν ισχύουν :

$h(x) \le f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell$,

τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$.

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 185

Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα μιας συνάρτησης f που είναι ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ, λέγεται κάθε συνάρτηση F, που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και $F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

Α4. **α.** Λάθος, **β.** Σωστό, **γ.** Σωστό, **δ.** Σωστό, **ε.** Λάθος.

ΘΕΜΑ Β

Β1. $D_h = \{x \in D_g \text{ και } g(x) \in D_f\}$

$= \{x \in [2, +\infty) \text{ και } \sqrt{x-2} + 1 > 1\}$

$= \{x \in [2, +\infty) \text{ και } \sqrt{x-2} > 0\}$

$= \{x \in [2, +\infty) \text{ και } x - 2 > 0\}$

$= \{x \in [2, +\infty) \text{ και } x > 2\}$

$= (2, +\infty)$

$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x-2} + 1) = 2\ell n(\sqrt{x-2} + 1 - 1)$

$= 2\ell n\sqrt{x-2} = \ell n\left(\sqrt{x-2}\right)^2 = \ell n(x-2)$

Επομένως $\boxed{\mathbf{h(x) = \ell n(x-2),\ x \in (2, +\infty)}}$.

Β2. **1ος τρόπος**

$$h'(x) = [\ell n(x-2)]' = \frac{1}{x-2}(x-2)' = \frac{1}{x-2} > 0 \text{ για } x > 2$$

άρα η h είναι γν. αύξουσα, άρα η h είναι 1-1, άρα **η h αντιστρέφεται**

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 2^+} h(x) = \lim_{x\to 2^+} \ell n(x-2) \underset{\substack{\text{όταν } x\to 2^+ \\ \text{τότε } u\to 0^+}}{\overset{x-2=u}{=}} \lim_{u\to 0^+} \ell n u = -\infty \\ &\lim_{x\to +\infty} h(x) = \lim_{x\to +\infty} \ell n(x-2) \underset{\substack{\text{όταν } x\to +\infty \\ \text{τότε } u\to +\infty}}{\overset{x-2=u}{=}} \lim_{u\to +\infty} \ell n u = +\infty \end{aligned}\right\} \overset{h\uparrow}{\Rightarrow} h((2, +\infty)) = \mathbb{R}$$

$D_{h^{-1}} = h((2, +\infty)) = \mathbb{R}$

Για κάθε $x \in (2, +\infty)$ και $y \in \mathbb{R}$:

$y = h(x) \Leftrightarrow y = \ell n(x-2) \Leftrightarrow e^y = x - 2 \Leftrightarrow x = e^y + 2$

Επομένως $\boxed{\mathbf{h^{-1}(x) = e^x + 2,\ x \in \mathbb{R}}}$.

Β2. **2ος τρόπος**

$h(x_1) = h(x_2) \Leftrightarrow \ell n(x_1 - 2) = \ell n(x_2 - 2) \Leftrightarrow x_1 - 2 = x_2 - 2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

άρα η h είναι 1-1, άρα $\boxed{\textbf{η h αντιστρέφεται}}$.

Η h είναι συνεχής στο $(2, +\infty)$ και

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 2^+} h(x) = \lim_{x\to 2^+} \ell n(x-2) \underset{\substack{\text{όταν } x\to 2^+ \\ \text{τότε } u\to 0^+}}{\overset{x-2=u}{=}} \lim_{u\to 0^+} \ell n u = -\infty \\ &\lim_{x\to +\infty} h(x) = \lim_{x\to +\infty} \ell n(x-2) \underset{\substack{\text{όταν } x\to +\infty \\ \text{τότε } u\to +\infty}}{\overset{x-2=u}{=}} \lim_{u\to +\infty} \ell n u = +\infty \end{aligned}\right\} \Rightarrow h((2, +\infty)) = IR$$

$D_{h^{-1}} = h((2, +\infty)) = IR$

Για κάθε $x \in (2, +\infty)$ και $y \in IR$:

$y = h(x) \Leftrightarrow y = \ell n(x-2) \Leftrightarrow e^y = x - 2 \Leftrightarrow x = e^y + 2$

Επομένως $\boxed{\mathbf{h^{-1}(x) = e^x + 2,\ x \in IR}}$.

Β3. Είναι $\displaystyle \lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{2\ell n(x-1)}{x-2} \underset{DL'H}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x\to 2} \frac{[2\ell n(x-1)]'}{(x-2)'} = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{2}{x-1}}{1} = 2$*

και $\displaystyle \lim_{x\to 2^+} h(x) = -\infty$ (από Β2 ερώτημα),

άρα $\boxed{\displaystyle \lim_{x\to 2}\left(\mathbf{h(x)} \cdot \frac{\mathbf{f(x)}}{\mathbf{x-2}}\right) = -\infty}$

* εναλλακτικά $\displaystyle \lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = f'(2) = 2,$

αφού $\displaystyle f'(x) = [2\ell n(x-1)]' = \frac{2}{x-1},\ x > 2$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. i) Έστω ότι η $y = \ell$ είναι η οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$

- αν $\kappa \neq 0$, τότε :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\kappa x^3 + \mu x}{x^2 + 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\kappa x^3}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \kappa x = +\infty \text{ ή } -\infty$$

ΑΤΟΠΟ αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

- αν $\kappa = 0$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mu x}{x^2 + 1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mu x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mu}{x} = 0$

άρα η $y = 0$ ($x'x$) είναι η οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

Επομένως $\boxed{\kappa = 0}$.

ii) Για $\kappa = 0$ είναι :

$f(x) = \dfrac{\mu x}{x^2 + 1}$ και

$$f'(x) = \frac{\mu(x^2 + 1) - 2\mu x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\mu - \mu x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\mu(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}$$

Για να εφάπτεται η $(\varepsilon) : y = x$ στη γραφική παράσταση της f στην αρχή των αξόνων $O(0, 0)$, θα πρέπει :

▷ $O(0, 0) \in C_f \Leftrightarrow f(0) = 0$ (που ισχύει) και

▷ $f'(0) = \lambda_\varepsilon \Leftrightarrow f'(0) = 1 \Leftrightarrow \boxed{\mu = 1}$.

Γ2. Για $\kappa = 0$ και $\mu = 1$ είναι :

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1},\ x \in \mathbb{R} \quad \text{και}$$

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2},\ x \in \mathbb{R}$$

i) • $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

• $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2} > 0 \Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow |x| > 1 \Leftrightarrow$

$x > 1$ ή $x < -1$

x	$-\infty$	-1		1		$+\infty$
f΄(x)	-	0	+	0	-	
f (x)	↘		↗		↘	

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα $(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$,
ενώ η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1, 1]$.
Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x = -1$ την τιμή

$$f(-1) = \frac{-1}{(-1)^2+1} = -\frac{1}{2}$$

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x = 1$ την τιμή

$$f(1) = \frac{1}{1^2+1} = \frac{1}{2}$$

ii) 1ος τρόπος (για το σύνολο τιμών της f)

- $\Delta_1 = (-\infty\ ,\ -1)$: Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο Δ_1

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0\\ \lim_{x\to-1} f(x) &= \lim_{x\to-1}\frac{x}{x^2+1} = -\frac{1}{2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow f(\Delta_1) = \left(-\frac{1}{2}\ ,\ 0\right)$$

- $\Delta_2 = [-1\ ,\ 1]$: Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο Δ_2

$f(-1) = -\frac{1}{2}$ και $f(1) = \frac{1}{2}$, άρα $f(\Delta_2) = \left[-\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\right]$

- $\Delta_3 = (1\ ,\ +\infty)$: Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο Δ_3

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to1} f(x) &= \lim_{x\to1}\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2}\\ \lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow f(\Delta_2) = \left(0\ ,\ \frac{1}{2}\right)$$

$f(IR) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) \cup f(\Delta_3) \Rightarrow \boxed{\mathbf{f(IR) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]}}$

2ος τρόπος (για το σύνολο τιμών της f)

$f(-1) = -\frac{1}{2}$ και $f(1) = \frac{1}{2}$

Θα δείξουμε ότι $-\frac{1}{2} \le f(x) \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow |f(x)| \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left|\frac{x}{x^2+1}\right| \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\frac{|x|}{x^2+1} \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2|x| \le x^2+1 \Leftrightarrow 0 \le x^2 - 2|x| + 1 \Leftrightarrow$

$0 \le |x|^2 - 2|x| + 1 \Leftrightarrow 0 \le (|x| - 1)^2$ που ισχύει

άρα $f(-1) = -\frac{1}{2} \le f(x) \le f(1) = \frac{1}{2}$, δηλαδή $\boxed{\mathbf{f(IR) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]}}$

Πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=\frac{1}{2}+\alpha^2$

1ος τρόπος

- Αν $\alpha \neq 0$, είναι $\alpha^2>0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}+\alpha^2>\frac{1}{2}$, άρα $\left(\frac{1}{2}+\alpha^2\right)\notin f(\mathbb{R})$

  επομένως η εξίσωση $f(x)=\frac{1}{2}+\alpha^2$ δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$.

- Αν $\alpha=0$, τότε $\frac{1}{2}+\alpha^2=\frac{1}{2}$

  Είναι $\frac{1}{2}\notin f(\Delta_1)$, $\frac{1}{2}\in f(\Delta_2)$ και $\frac{1}{2}\notin f(\Delta_3)$ επομένως

  η εξίσωση $f(x)=\frac{1}{2}$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $\mathbb{R}$ (την $x_0=1$).

Η εξίσωση $f(x)=\frac{1}{2}+\alpha^2$ δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$ όταν $\alpha\neq 0$ ενώ έχει μοναδική ρίζα το $x_0=1$ όταν $\alpha=0$.

2ος τρόπος

$f(x)=\frac{1}{2}+\alpha^2 \Leftrightarrow \frac{x}{x^2+1}=\frac{1}{2}+\alpha^2 \Leftrightarrow 2x=x^2+1+2\alpha^2(x^2+1) \Leftrightarrow$

$2x=x^2+1+2\alpha^2x^2+2\alpha^2 \Leftrightarrow (2\alpha^2+1)x^2-2x+(2\alpha^2+1)=0$

$\Delta=4-4(2\alpha^2+1)^2=4-4\alpha^4-4\alpha^2-4=-4\alpha^2(\alpha^2+1)\leq 0$

- Αν $\alpha=0$ τότε $\Delta=0$ και η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα
- Αν $\alpha\neq 0$ τότε $\Delta<0$ και η εξίσωση είναι αδύνατη

Η εξίσωση $f(x)=\frac{1}{2}+\alpha^2$ δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$ όταν $\alpha\neq 0$ ενώ έχει μία ρίζα όταν $\alpha=0$.

Γ3. i) $I_\nu + I_{\nu+1} = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1}dx + \int_0^1 \frac{x^{2(\nu+1)+1}}{x^2+1}dx$

$$= \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1}dx + \int_0^1 \frac{x^{2\nu+3}}{x^2+1}dx = \int_0^1 \left(\frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1} + \frac{x^{2\nu+3}}{x^2+1}\right)dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}+x^{2\nu+3}}{x^2+1}dx = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}(x^2+1)}{x^2+1}dx = \int_0^1 x^{2\nu+1}dx$$

$$= \left[\frac{x^{2\nu+2}}{2\nu+2}\right]_0^1 = \frac{1^{2\nu+2}}{2\nu+2} - \frac{0^{2\nu+2}}{2\nu+2} = \frac{1}{2\nu+2}$$

Επομένως $\boxed{\mathbf{I_\nu + I_{\nu+1} = \frac{1}{2\nu+2}}, \textbf{ για κάθε } \nu \in \mathbb{N}}$ (1)

ii) • $I_0 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx$

$$= \frac{1}{2}\left[\ell n(x^2+1)\right]_0^1 = \frac{1}{2}(\ell n2 - \cancel{\ell n1}), \quad \text{άρα} \quad \boxed{\mathbf{I_0 = \frac{1}{2}\ell n2}}$$

• Από την (1) για $\nu = 0$:

$$I_0 + I_1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow I_1 = \frac{1}{2} - I_0 \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{I_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ell n2}}$$

• Από την (1) για $\nu = 1$:

$$I_1 + I_2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow I_2 = \frac{1}{4} - I_2 \Leftrightarrow I_2 = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ell n2\right) \Leftrightarrow$$

$$I_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ell n2 \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{I_2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ell n2}}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θεωρούμε τη συνάρτηση h, με $h(x) = g(x) + x$, $x \in [-1, 0]$.

- η h είναι συνεχής στο $[-1, 0]$ ως άθροισμα συνεχών
- $h(-1) = g(-1) - 1 < 0$, διότι $g(x) < 1$, για κάθε $x \in IR$
  $h(0) = g(0) > 0$, διότι $g(x) > 0$, για κάθε $x \in IR$

από **Θ. Bolzano**

υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (-1, 0)$ τέτοιο ώστε $h(x_1) = 0$ **(1)**

Για τη μοναδικότητα του x_1

1^ος^ τρόπος

Έστω ότι η h έχει δύο ρίζες $\rho_1, \rho_2 \in (-1, 0)$ με $\rho_1 < \rho_2$

- η h είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$ ως άθροισμα συνεχών
- η h είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) ως άθροισμα παραγωγίσιμων
  με $h'(x) = g'(x) + 1$
- $h(\rho_1) = h(\rho_2) = 0$

άρα από **Θ. Rolle**

υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο ώστε $h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow$

$g'(\xi) + 1 = 0 \Leftrightarrow g'(\xi) = -1$

ΑΤΟΠΟ διότι $g'(x) \neq -1$, για κάθε $x \in IR$

Επομένως η h έχει μια το πολύ ρίζα στο $(-1, 0)$. **(2)**

Από (1) και (2) προκύπτει ότι υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (-1, 0)$

τέτοιο ώστε $h(x_1) = 0$ δηλαδή

$\boxed{\text{υπάρχει μοναδικό } x_1 \in (-1, 0) \text{ τέτοιο ώστε } g(x_1) + x_1 = 0}$.

2ος τρόπος

$h(x) = g(x) + x,\ x \in [-1, 0]$

$h'(x) = g'(x) + 1 \neq 0$, αφού $g'(x) \neq -1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Η h' είναι συνεχής στο $[-1, 0]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων

από συνέπειες Θ. Bolzano

η h' διατηρεί σταθερό πρόσημο

άρα η h είναι γνησίως μονότονη στο $[-1, 0]$

$h(0) = g(0) > 0$ και $h(x_1) = 0$ (αφού το x_1 είναι ρίζα της h)

Είναι $x_1 < 0$ και $h(x_1) < h(0)$ και επειδή η h είναι γνησίως μονότονη

θα είναι h γνησίως αύξουσα στο $[x_1, 0]$.

Επομένως η h έχει μια το πολύ ρίζα στο $(-1, 0)$. **(3)**

Από (1) και (3) προκύπτει ότι υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (-1, 0)$

τέτοιο ώστε $h(x_1) = 0$ δηλαδή

$\boxed{\textbf{υπάρχει μοναδικό } x_1 \in (-1, 0) \textbf{ τέτοιο ώστε } g(x_1) + x_1 = 0}$.

Δ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$,

άρα $\lim_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} \in \mathbb{R}$

- $\lim_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \dfrac{x^2 \cdot (g(x) + x)}{x} = \lim_{x \to 0^-} [x \cdot (g(x) + x)] = 0$

- $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \dfrac{2ημx + εφx - κx}{x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DL'H}{=}} \lim_{x \to 0^+} \dfrac{(2ημx + εφx - κx)'}{(x)'}$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{2συνx + \dfrac{1}{συν^2 x} - κ}{1} = 3 - κ$$

Είναι $0 = 3 - κ \Leftrightarrow \boxed{κ = 3}$

Δ3. i) **1ος τρόπος**

Για $x \in \left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right)$ είναι $f(x) = 2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x$.

$$f'(x) = 2\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 3 = \frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x - 3\sigma\upsilon\nu^2 x + 1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

$$= \frac{(2\sigma\upsilon\nu x + 1)(\sigma\upsilon\nu^2 x - 1)^2}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

Είναι $f'(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right)$ και το "=" ισχύει μόνο για $x = 0$,

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right)$

Για $0 \leq x < \frac{\pi}{2} \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(0) \leq f(x)$ άρα $\boxed{\mathbf{f(x) \geq 0,\ \text{για κάθε}\ x \in \left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right)}}$.

2ος τρόπος

Θεωρούμε $\varphi(x) = 2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x,\ x \in \left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right)$

$$\varphi'(x) = (2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x)' = 2\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x},\ x \in \left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right)$$

(ε) : εφαπτομένη της C_φ στο $O(0\,,\,0)$

$(\varepsilon) : y - \varphi(0) = \varphi'(0)\cdot(x - 0) \Leftrightarrow (\varepsilon) : y = 3x$

$$\varphi''(x) = \left(2\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\right)' = -2\eta\mu x + \frac{2\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^3 x} = \frac{2\eta\mu x(1 - \sigma\upsilon\nu^3 x)}{\sigma\upsilon\nu^3 x},\ x \in \left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right)$$

Είναι $\varphi''(x) \geq 0$ και το "=" ισχύει μόνο για $x = 0$, άρα η φ είναι κυρτή δηλαδή η C_φ βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη (ε) της στο $O(0\,,\,0)$ με εξαίρεση το σημείο επαφής O, δηλαδή $\varphi(x) \geq 3x \Leftrightarrow$

$2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x \geq 3x,\ x \in \left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right)$ άρα $\boxed{\mathbf{f(x) \geq 0,\ \text{για κάθε}\ x \in \left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right)}}$.

Δ3. ii) Η εξίσωση γράφεται $f(x) = \frac{\pi}{3}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } \Delta = \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \\ f(0) = 0 \text{ και} \\ \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x) = +\infty \\ \quad \text{διότι } \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (2\eta\mu x - 3x) = 0 \text{ και } \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \varepsilon\varphi x = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow f(\Delta) = [0, +\infty)$$

$\frac{\pi}{3} \in f(\Delta)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ,

άρα $\boxed{\textbf{υπάρχει μοναδικό } x_2 \in \Delta \textbf{ τέτοιο ώστε } f(x_2) = \frac{\pi}{3}}$.

Δ4. i) Έχουμε ορίσει τη συνάρτηση h, με $h(x) = g(x) + x$, $x \in [-1, 0]$

Αν δεν έχουμε βρει τη μονοτονία της h το κάνουμε.

$h'(x) = g'(x) + 1 \neq 0$, αφού $g'(x) \neq -1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Η h' είναι συνεχής στο $[-1, 0]$ ως άθροισμα συνεχών

από συνέπειες Θ. Bolzano

η h' διατηρεί σταθερό πρόσημο

άρα η h είναι γνησίως μονότονη στο $[-1, 0]$

$h(0) = g(0) > 0$ και $h(x_1) = 0$ (αφού το x_1 είναι ρίζα της h)

Είναι $x_1 < 0$ και $h(x_1) < h(0)$ και επειδή η h είναι γνησίως μονότονη

θα είναι h γνησίως αύξουσα στο $[x_1, 0]$.

$$x_1 \leq x \leq 0 \overset{h\uparrow}{\Rightarrow} h(x_1) \leq h(x) \Leftrightarrow 0 \leq g(x) + x$$

άρα $\boxed{f(x) = x^2 \cdot [g(x) + x] \geq 0, \text{ για κάθε } x \in [x_1, 0]}$

Δ4. ii) Έστω E_1 το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ την ευθεία $x = x_1$ και τον άξονα $y'y$.

Είναι $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [x_1, 0]$, άρα

$$E_1 = \int_{x_1}^{0} f(x)\,dx = \int_{x_1}^{0} x^2 \cdot [g(x) + x]\,dx = \int_{x_1}^{0} x^2 g(x)\,dx + \int_{x_1}^{0} x^3\,dx$$

$$= \int_{x_1}^{0} \left(\frac{x^3}{3}\right)' \cdot g(x)\,dx + \left[\frac{x^4}{4}\right]_{x_1}^{0} = \left[\frac{x^3}{3} \cdot g(x)\right]_{x_1}^{0} - \int_{x_1}^{0} \frac{x^3}{3} \cdot g'(x)\,dx - \frac{x_1^4}{4}$$

$$= -\frac{x_1^3}{3} \cdot g(x_1) - \frac{1}{3}\int_{x_1}^{0} x^3 \cdot g'(x)\,dx - \frac{x_1^4}{4}$$

Έστω E_2 το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ την ευθεία $x = \frac{\pi}{3}$ και τον άξονα $y'y$.

Είναι $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, άρα

$$E_2 = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} (2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x)\,dx$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} 2\eta\mu x\,dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\,dx - 3\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} x\,dx$$

$$= [-2\sigma\upsilon\nu x]_{0}^{\frac{\pi}{3}} + [-\ell n(\sigma\upsilon\nu x)]_{0}^{\frac{\pi}{3}} - 3\left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= -1 + 2 - \ell n\frac{1}{2} + \ell n 1 - 3\frac{\pi^2}{18} = 1 + \ell n 2 - \frac{\pi^2}{6}$$

Είναι $E_1 = E_2 \Leftrightarrow -\frac{x_1^3}{3} \cdot g(x_1) - \frac{1}{3}\int_{x_1}^{0} x^3 \cdot g'(x)\,dx - \frac{x_1^4}{4} = 1 + \ell n 2 - \frac{\pi^2}{6} \overset{\cdot 3}{\Leftrightarrow}$

$$-x_1^3 \cdot g(x_1) - \int_{x_1}^{0} x^3 \cdot g'(x)\,dx - \frac{3x_1^4}{4} = 3 + 3\ell n 2 - \frac{\pi^2}{2} \overset{g(x_1) = -x_1}{\Leftrightarrow}$$

$$x_1^4 - 3 - 3\ell n 2 - \frac{3x_1^4}{4} + \frac{\pi^2}{2} = \int_{x_1}^{0} x^3 \cdot g'(x)\,dx \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\int_{x_1}^{0} x^3 \cdot g'(x)\,dx = \frac{x_1^4}{4} + \frac{\pi^2}{2} - 3\ell n 2 - 3}$$

ΣΧΟΛΙΑΣΜΟΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Εύκολο θέμα χωρίς παγίδες. Γνώσεις σχολικού βιβλίου. Διδαγμένο στο απόλυτο. Τα Σ-Λ υπάρχουν ακριβώς ίδια στο βιβλίο του φροντιστηρίου μας.

ΘΕΜΑ Β

Απλό θέμα χωρίς δυσκολίες, με γνώσεις σχολικού βιβλίου. Αναμενόμενα για εμάς. Έχουμε μεγάλη επιμονή στην εξάντληση του σχολικού βιβλίου.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1: Καλή γνώση θεωρίας

Γ2: Αναμενόμενο για εμάς, χιλιοειπωμένο. Ίδια ακριβώς άσκηση με τα ερωτήματα της διδαγμένα και απαντημένα υπάρχει στο βιβλίο του φροντιστηρίου μας «Λίγο Πριν» σε λυμένο παράδειγμα στη σελίδα 81, στο Θέμα 2.05 στη σελίδα 207, στο θέμα 4.62 στη σελίδα 254 και στο θέμα 4.63 στη σελίδα 255.

Γ3: Η άσκηση του βιβλίου 32.6 στη σελίδα 462 του φροντιστηρίου μας «Μαθηματικά Προσανατολισμού» είναι ίδια με το θέμα.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1, Δ2: Μέτριας δυσκολίας. Μεγαλύτερων απαιτήσεων για καλά οργανωμένους και προετοιμασμένους μαθητές. Διδαγμένο στο απόλυτο.

Δ3, Δ4: Αυξημένης δυσκολίας για μαθητές καλά προετοιμασμένους με κριτική σκέψη.

Αρκετά παρόμοια θέματα έχουν διδαχθεί στο φροντιστήριο από τους μαθηματικούς μας:

Κοθρής Μάνος

Φαμέλης Πάρης

Σκίπη Κική