

Πανελλήνιες Εξετάσεις Ημερήσιων Γενικών Λυκείων

Εξεταζόμενο Μάθημα: Μαθηματικά Προσανατολισμού,

Θετικών & Οικονομικών Σπουδών

Ημερομηνία: Τετάρτη 3 Ιουνίου 2026

Ενδεικτικές Απαντήσεις Θεμάτων

Θέμα Α

A1. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 133

A2. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 151

A3. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 185

A4.

α. Λάθος

β. Σωστό

γ. Σωστό

δ. Σωστό

ε. Λάθος

ΘΕΜΑ Β

B1. Έχουμε

$$A_{f \circ g} = \{x \in A_g \mid g(x) \in A_f\} = \{x \in [2, +\infty) \mid \sqrt{x-2} + 1 > 1\}$$

$$= \{x \in [2, +\infty) \mid \sqrt{x-2} > 0\} = \{x \in [2, +\infty) \mid x > 2\} = (2, +\infty)$$

$$\text{και } h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$= f(\sqrt{x-2} + 1) = 2 \ln(\sqrt{x-2} + 1 - 1) = 2 \ln(\sqrt{x-2}) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln(x-2) = \ln(x-2).$$

B2.

Η h είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(2, +\infty)$ με $h'(x) = \frac{1}{x-2} > 0$ άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$ οπότε είναι 1-1 δηλαδή αντιστρέφεται.

Η h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$ επομένως

$$h((2, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \right) = (-\infty, +\infty)$$

Για κάθε $x > 2$ και $y \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$h(x) = y \Leftrightarrow \ln(x-2) = y \Leftrightarrow x-2 = e^y \Leftrightarrow x = e^y + 2$$

$$\text{Άρα } h^{-1}(x) = e^x + 2, x \in \mathbb{R}$$

ΜΕΘΟΔΙΚΟ

B3.

Έχουμε $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \ln(x - 2) = -\infty$

και

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 \ln(x - 1)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{1} = 2, \quad \text{χρησιμοποιώντας κανόνα D.l.H.}$$

Άρα

$$\lim_{x \rightarrow 2} h(x) \cdot \frac{f(x)}{x - 2} = -\infty$$

β' Τρόπος

$$\text{Είναι: } \lim_{x \rightarrow 2} [\ln(x - 2) \cdot \frac{f(x)}{x - 2}]$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left[\ln(x - 2) \cdot \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \right] = (-\infty) \cdot f'(2) = -\infty$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x - 2) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty$$

κάνοντας την αντικατάσταση: $u = x - 2$ οπότε: $u_0 = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 2) = 0^+$.

Αφού $f'(x) = \frac{2}{x-1}$ για κάθε $x > 1$, οπότε $f'(2) = 2$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. i) Απόδειξη ότι $\kappa = 0$:

Αν $\kappa \neq 0$, τότε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\kappa x^3 + \mu x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \kappa x = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } \kappa > 0 \\ -\infty, & \text{αν } \kappa < 0 \end{cases}$$

Επειδή θέλουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \in \mathbb{R}$ πρέπει $\kappa = 0$.

ii) Με $\kappa = 0$: $f(x) = \frac{\mu x}{x^2 + 1}$.

Η ευθεία $y = x$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση στο $O(0,0)$, άρα:

- $f(0) = 0$
- $f'(0) = 1$ (από την κλίση ευθείας $y = x$):

Για την παράγωγο έχουμε:

$$f'(x) = \frac{\mu(x^2 + 1) - \mu x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\mu(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(0) = \frac{\mu \cdot 1}{1} = \mu$$




Άρα $\mu = f'(0) = 1$ και $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.

Γ2. i) Μελέτη μονοτονίας και ακροτάτων:

Η f είναι παραγωγίσιμη με: $f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$

Λύνουμε την εξίσωση: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -1$

Επομένως, έχουμε τον παρακάτω πίνακα μονοτονίας-ακροτάτων

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	+	0	-
$f(x)$					T.M	

$T.E.$

Τοπικό **ελάχιστο**: $f(-1) = \frac{-1}{2}$, τοπικό **μέγιστο**: $f(1) = \frac{1}{2}$.

ii) Σύνολο τιμών: Η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} και ισχύουν: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$,

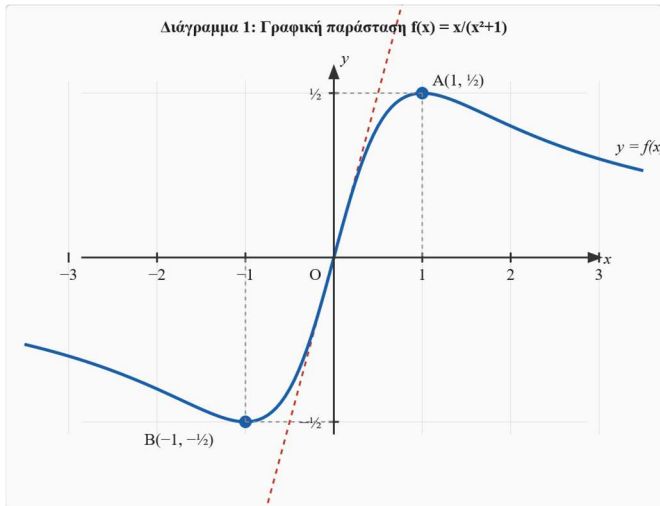
$f(-1) = -\frac{1}{2}$ (τ.ελάχ.), $f(1) = \frac{1}{2}$ (τ.μέγ.). Οπότε $f(-1)$ ολικό ελάχιστο και $f(1)$ ολικό μέγιστο.

Άρα σύνολο τιμών $f(\mathbb{R}) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Αναζητούμε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \frac{1}{2} + a^2$ (1)

- Αν $a = 0$: τότε (1) $\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}$ και έχει ακριβώς **1 λύση** ($x = 1$, η θέση ολικού μεγίστου).
- Αν $a \neq 0$: τότε $\frac{1}{2} + a^2 > \frac{1}{2} = f(1)$ που είναι το ολικό μέγιστο, οπότε η (1) είναι αδύνατη.

ΜΕΘΟΔΙΚΟ



Γ3. Ορίζουμε $I_\nu = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1} dx, \nu \in \mathbb{N}$.

i) Απόδειξη ότι $I_\nu + I_{\nu+1} = \frac{1}{2\nu+2}$;

Έχουμε:

$$\begin{aligned} I_\nu + I_{\nu+1} &= \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1} dx + \int_0^1 \frac{x^{2\nu+3}}{x^2+1} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}(1+x^2)}{x^2+1} dx = \int_0^1 x^{2\nu+1} dx = \left[\frac{x^{2\nu+2}}{2\nu+2} \right]_0^1 = \frac{1}{2\nu+2} \end{aligned}$$

ii) Υπολογισμός I_0, I_1, I_2 :

$$I_0 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \left[\frac{\ln(x^2+1)}{2} \right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}$$

Επίσης για $\nu = 0$:

$$I_0 + I_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow I_1 = \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2} = \frac{1 - \ln 2}{2}$$

και για $\nu = 1$ είναι:

$$I_1 + I_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow I_2 = \frac{1}{4} - \frac{1 - \ln 2}{2} = \frac{2 \ln 2 - 1}{4}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (-1, 0)$ ώστε $g(x_1) + x_1 = 0$.

Θεωρούμε $\varphi(x) = g(x) + x$. Η φ είναι συνεχής στο \mathbb{R} (ως παραγωγίσιμη) με

- $\varphi(-1) = g(-1) - 1 < 0$ (αφού $0 < g(-1) < 1 \Rightarrow g(-1) - 1 < 0$)
- $\varphi(0) = g(0) > 0$ (αφού $0 < g(0) < 1$)

Από το **Θεώρημα Bolzano**, υπάρχει $x_1 \in (-1, 0)$ ώστε $\varphi(x_1) = 0$, δηλαδή $g(x_1) + x_1 = 0$.

Η φ είναι παραγωγίσιμη με $\varphi'(x) = g'(x) + 1 \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Οπότε η φ' διατηρεί πρόσημο στο \mathbb{R} και άρα η φ είναι γνησίως μονότονη. Συνεπώς, η ρίζα $x_1 \in (-1, 0)$ είναι μοναδική.

Δ2. Επειδή η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x = 0$ ισχύει:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2(g(x) + x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - \kappa x}{x} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} [x(g(x) + x)] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{2\eta\mu x}{x} + \frac{\varepsilon\varphi x}{x} - \kappa \right], \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon\varphi x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = 1 \\ &\Leftrightarrow 0 = 2 \cdot 1 + 1 - \kappa \Leftrightarrow \kappa = 3 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα: } f(x) = \begin{cases} x^2(g(x) + x) & \text{αν } x < 0 \\ 2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x & \text{αν } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Δ3. Στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι: $f(x) = 2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x$.

i) Η f είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ και παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ με

$$f'(x) = 2\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 3 = \frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x - 3\sigma\upsilon\nu^2 x + 1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{(\sigma\upsilon\nu x - 1)^2(2\sigma\upsilon\nu x + 1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} > 0$$

αφού $0 < \sigma\upsilon\nu x < 1$.

Άρα $f'(x) > 0$ στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, αφού είναι συνεχής στο $x = 0$.

Για κάθε $0 < x < \frac{\pi}{2} \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} f(0) < f(x)$ και επειδή $f(0) = 0$ ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$.

ii) Έστω η συνάρτηση $h(x) = 3f(x) - \pi$

Η h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ εφόσον $h'(x) = 3f'(x) > 0$ για $0 < x < \frac{\pi}{2}$

από το i.

ΜΕΘΟΔΙΚΟ

Επίσης $h(0) = 3f(0) - \pi = -\pi < 0$ και $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} h(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \varepsilon \varphi x = +\infty$

Επειδή $y = 0 \in h\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$ η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα x_2 στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ η οποία είναι μοναδική λόγω της μονοτονίας της h και $h(0) \neq 0$.

Δ4. i) Απόδειξη ότι $f(x) \geq 0$ στο $[x_1, 0]$:

Για $x \in [x_1, 0]$: $f(x) = x^2(g(x) + x)$.

Έχουμε: $x^2 \geq 0$ πάντα.

Για $\varphi(x) = g(x) + x$ παρατηρούμε ότι $\varphi(x_1) = 0$ με $x_1 \in (-1, 0)$.

Επομένως για $x \in (x_1, 0]$ και επειδή η φ είναι συνεχής θα διατηρεί πρόσημο δηλαδή $\varphi(x) \neq 0$.

Για $x = 0$ είναι $\varphi(0) = g(0) > 0$. Οπότε $\varphi(x) > 0$ για $x \in (x_1, 0]$

Άρα: $\varphi(x) = g(x) + x \geq 0$ στο $[x_1, 0]$.

Άρα $f(x) = x^2 \cdot \varphi(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [x_1, 0]$ με την ισότητα να ισχύει για $x = x_1$.

ii) Αφού ο άξονας $y'y$ χωρίζει το Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία:

$$\int_{x_1}^0 f(x) dx = \int_0^{f(x_2)} f(x) dx$$

Αφού $3f(x_2) = \pi \Rightarrow f(x_2) = \frac{\pi}{3}$ είναι $x = \frac{\pi}{3}$.

Υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2 \eta \mu x + \varepsilon \varphi x - 3x) dx &= \left[-2 \sigma \nu \nu x - \ln(\sigma \nu \nu x) - \frac{3x^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \left(-2 \cdot \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi^2}{9} \right) - (-2 - 0 - 0) = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$

Αντίστοιχα:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^0 x^2 g(x) dx &= \left[\frac{x^3}{3} g(x) \right]_{x_1}^0 - \int_{x_1}^0 \frac{x^3}{3} g'(x) dx \\ &= \left(0 - \frac{x_1^3}{3} g(x_1) \right) - \frac{1}{3} \int_{x_1}^0 x^3 g'(x) dx \end{aligned}$$

αφού $g(x_1) + x_1 = 0$, ισχύει $g(x_1) = -x_1$:

ΜΕΘΟΔΙΚΟ

$$= \frac{x_1^4}{3} - \frac{1}{3} \int_{x_1}^0 x^3 g'(x) dx$$

Οπότε:

$$\int_{x_1}^0 x^2 (g(x) + x) dx = \frac{x_1^4}{3} - \frac{1}{3} \int_{x_1}^0 x^3 g'(x) dx - \frac{x_1^4}{4} = \frac{x_1^4}{12} - \frac{1}{3} \int_{x_1}^0 x^3 g'(x) dx$$

Επειδή τα χωρία είναι ισεμβαδικά ισχύει:

$$\frac{x_1^4}{4} - \int_{x_1}^0 x^3 g'(x) dx = 3 + 3 \ln 2 - \frac{\pi^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \int_{x_1}^0 x^3 g'(x) dx = \frac{x_1^4}{4} + \frac{\pi^2}{2} - 3 \ln 2 - 3$$

Ευχόμαστε καλά αποτελέσματα!

Επιμέλεια:

Βαγγέλης Ράλλης, Γιάννης Μερτίκας, Δημήτρης Βλάχος, Γιάννης Παπαβασιλείου, Γιάννης Αλεξόπουλος, Νίκος Αλεξόπουλος, Κωνσταντίνα Μωραΐτη, Αποστόλης Κωτσιαρίνης, Βαγγέλης Καρύδης, Κώστας Λέσκας, Δημήτρης Γαληνός, Μαρκάκης Ιάσοντας, Ηρώ Μαρκάκη

Υπολογισμός Μορίων Πανελλαδικών 2026

Χρησιμοποιήστε την Εφαρμογή για να **υπολογίσετε Μόρια** για κάθε Πανεπιστημιακό Τμήμα / Σχολή!

Υπολογίστε Μόρια, δείτε τα **Τμήματα Επιτυχίας** (με τις περσινές βάσεις), τις **Ελάχιστες Βάσεις Εισαγωγής** για κάθε Ειδικό Μάθημα και για κάθε Πανεπιστημιακό Τμήμα μέσα από την ιστοσελίδα του ΜΕΘΟΔΙΚΟΥ ή την Android Εφαρμογή: mobile app