

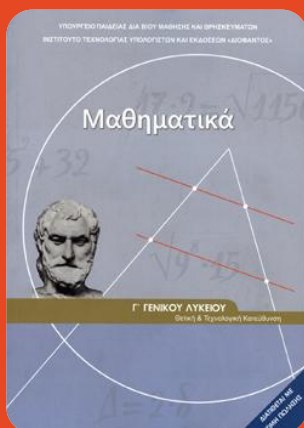


Η σεξουαλικότητα: Γκούσταφ Κλιμτ (1862-1918) The Kiss, 1907-08

# ΛΥΣΕΙΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ  
ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Τετάρτη  
3 Ιουνίου 2026



ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

lisari team

ΛΥΣΕΙΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ  
ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2026

1η έκδοση

Βελαώρας Γιάννης  
Βοσκάκης Σήφης  
Γκριμπαβιώτης Πάνος  
Μανώλης Ανδρέας  
Ποδηματάς Θωμάς

Συντονισμός

Γιάννης Βελαώρας

Οι απαντήσεις - λύσεις είναι αποτέλεσμα της συλλογικής δουλειάς των μελών της **lisari team** όπως αναγράφεται στο εξώφυλλο

**1η έκδοση: 2 – 6 – 2025** (συνεχής ανανέωση)



Οι λύσεις διατίθεται **αποκλειστικά**

από τον μαθηματικό ιστότοπο

**[lisari.blogspot.com](http://lisari.blogspot.com)**



**lisari team / Σχολικό έτος 2025 – 26**

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: ΤΕΤΑΡΤΗ 3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2026**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ**

**ΘΕΤΙΚΗΣ, ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ**

**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ..... (....)**

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1. (Σχολικό βιβλίο σελ. 133)**

**A2. (Σχολικό βιβλίο σελ. 51)**

**A3. (Σχολικό βιβλίο σελ 185)**

**A4. α) ΛΑΘΟΣ      β) ΣΩΣΤΟ      γ) ΣΩΣΤΟ      δ) ΣΩΣΤΟ      ε) ΛΑΘΟΣ**

**ΘΕΜΑ Β**

**B1.  $D_f = (1, +\infty)$ ,  $D_g = [2, +\infty)$**

Η  $h = f \circ g$  ορίζεται όταν και μόνο όταν:

$$x \in D_g \Leftrightarrow x \geq 2$$

και

$$g(x) \in D_f \Leftrightarrow g(x) > 1 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} + 1 > 1 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} > 0 \Leftrightarrow x > 2$$

Επομένως  $D_h = (2, +\infty)$  με:

$$\begin{aligned} h(x) &= (f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2 \ln(g(x) - 1) = 2 \ln(\sqrt{x-2} + 1 - 1) \\ &= 2 \ln \sqrt{x-2} = \ln \sqrt{x-2}^2 = \ln(x-2) \end{aligned}$$

**B2. Η h είναι παραγωγίσιμη στο  $(2, +\infty)$  με:**

$$h'(x) = \frac{1}{x-2} > 0 \Rightarrow h \nearrow D_h \text{ οπότε είναι 1-1 και αντιστρέφεται.}$$

Η h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο  $D_h$ , οπότε:

$$h(D_h) = \left( \lim_{x \rightarrow 2^+} h(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x-2) \stackrel{x-2=u}{=} \lim_{\substack{u_0=0 \\ u \rightarrow 0^+}} \ln u = -\infty$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x-2) \stackrel{x-2=u}{=} \lim_{\substack{u_0=+\infty \\ u \rightarrow +\infty}} \ln u = +\infty$$

Για κάθε  $x \in D_h = (2, +\infty)$  και  $y \in h(D_h) = \mathbb{R}$

θέτουμε  $h(x) = y \Leftrightarrow x = h^{-1}(y)$

$$h(x) = y \Leftrightarrow \ln(x-2) = y \Leftrightarrow \ln(x-2) = \ln e^y \Leftrightarrow x-2 = e^y$$

$$\Leftrightarrow x = e^y + 2 \Leftrightarrow h^{-1}(y) = e^y + 2, y \in \mathbb{R}$$

Άρα  $h^{-1}(x) = e^x + 2$  με  $D_{h^{-1}} = \mathbb{R}$

$$\mathbf{B3.} \lim_{x \rightarrow 2} \left( h(x) \cdot \frac{f(x)}{x-2} \right)^{-\infty \cdot 2} = -\infty$$

αφού  $\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = -\infty$  από B2

και

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 \ln(x-1)}{x-2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{1} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{x-1} = 2$$

### ΘΕΜΑ Γ

**Γ1. i)** Εφόσον η  $f$  έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο  $+\infty$  τότε  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$

Αν  $\kappa > 0$  τότε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\kappa x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \kappa x = +\infty \text{ το οποίο είναι άτοπο.}$$

Αν  $\kappa < 0$  τότε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\kappa x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \kappa x = -\infty \text{ το οποίο είναι άτοπο.}$$

Επομένως  $\kappa = 0$

**ii)** Αν  $\mu = 0$  τότε είναι  $f(x) = 0$  η οποία απορρίπτεται αφού η  $f$  έχει εφαπτομένη την  $y = x$  στο σημείο  $(0,0)$  οπότε θα πρέπει  $f'(0) = 1$

Αν  $\mu \neq 0$  τότε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \mu \cdot \frac{1}{x} = 0 \text{ το οποίο είναι δεκτό.}$$

Άρα για  $\kappa=0$  και  $\mu \neq 0$  είναι  $f(x) = \frac{\mu x}{x^2 + 1}$

Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $f'(x) = \frac{\mu(x^2 + 1) - 2\mu x^2}{(x^2 + 1)^2}$

Αφού η  $y = x$  είναι εφαπτομένη της  $C_f$  στην αρχή των αξόνων τότε πρέπει:

$$f'(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{\mu - 0}{1} = 1 \Leftrightarrow \mu = 1$$

Οπότε είναι  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  με  $f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$

**Γ2. i)**  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$  ή  $x = -1$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 < 0 \Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow x > 1 \text{ ή } x < -1$$

Η μονοτονία και τα ακρότατα της  $f$  φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+	-
f	$\searrow$	T.E	$\nearrow$	T.M

Η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο -1 το  $f(-1) = -\frac{1}{2}$

Η  $f$  παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο 1 το  $f(1) = \frac{1}{2}$

ii) Στο  $\Delta_1 = (-\infty, 1]$  η  $f$  είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα άρα

$$f(\Delta_1) = \left[ f(-1), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = \left[ -\frac{1}{2}, 0 \right), \text{ διότι:}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Στο  $\Delta_2 = [-1, 1]$  η  $f$  είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα άρα  $f(\Delta_2) = [f(-1), f(1)] = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

Στο  $\Delta_3 = [1, +\infty)$  η  $f$  είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα άρα  $f(\Delta_3) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(1)\right) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$ ,

διότι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Οπότε το σύνολο τιμών της  $f$  είναι:

$$f(D_f) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) \cup f(\Delta_3) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

Για το πλήθος των ριζών της εξίσωσης  $f(x) = \frac{1}{2} + \alpha^2$  έχουμε:

Είναι  $\frac{1}{2} + \alpha^2 \geq \frac{1}{2}$  για κάθε  $\alpha \in \mathbb{R}$ , οπότε διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

Αν  $\frac{1}{2} + \alpha^2 > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha \neq 0$  τότε το  $\frac{1}{2} + \alpha^2 \notin f(D_f)$  άρα η εξίσωση  $f(x) = \frac{1}{2} + \alpha^2$  είναι αδύνατη για  $\alpha \neq 0$ .

Αν  $\frac{1}{2} + \alpha^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = 0$  τότε η εξίσωση  $f(x) = \frac{1}{2}$  έχει μοναδική λύση την  $x = 1$

$$\begin{aligned} \text{Γ3. i)} \quad I_v + I_{v+1} &= \int_0^1 \frac{x^{2v+1}}{x^2 + 1} dx + \int_0^1 \frac{x^{2v+3}}{x^2 + 1} dx = \int_0^1 \frac{x^{2v+1} + x^{2v+3}}{x^2 + 1} dx = \int_0^1 \frac{x^{2v+1}(1+x^2)}{x^2 + 1} dx = \\ &= \int_0^1 x^{2v+1} dx = \left[ \frac{x^{2v+2}}{2v+2} \right]_0^1 = \frac{1}{2v+2} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } I_v + I_{v+1} = \frac{1}{2v+2} \quad (1)$$

$$\text{ii)} \quad I_0 = \int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx = \int_0^1 \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \left[ \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2$$

Για  $v=0$  στη σχέση (1) έχουμε:

$$I_0 + I_1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow I_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2$$

Για  $v=1$  στη σχέση (1) έχουμε:

$$I_1 + I_2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow I_2 = \frac{1}{4} - \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 \right) \Leftrightarrow I_2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$$

### ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θεωρούμε τη συνάρτηση  $h(x) = g(x) + x$  ορισμένη στο  $[-1, 0]$

- Η  $h$  είναι συνεχής το  $[-1, 0]$  ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων
- $h(-1) = g(-1) - 1 < 0$

και

$$h(0) = g(0) + 0 = g(0) > 0$$

διότι από υπόθεση ξέρουμε ότι  $0 < g(x) < 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

Οπότε από το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_1 \in (-1, 0)$  τέτοιο ώστε

$$h(x_1) = 0 \Leftrightarrow g(x_1) + x_1 = 0$$

Επίσης η  $h$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(-1, 0)$  ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$h'(x) = g'(x) + 1 \neq 0$$

Όμως  $h'$  είναι συνεχής στο  $(-1, 0)$  διότι η  $g'$  είναι συνεχής στο  $(-1, 0)$  από υπόθεση άρα η  $h'$  διατηρεί σταθερό πρόσημο στο  $(-1, 0)$ .

Συνεπώς η  $h$  είναι γνησίως μονότονη άρα το  $x_1$  μοναδική ρίζα της  $h$  στο  $(-1, 0)$ .

Δ2. Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 0$ , οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

Όμως

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2(g(x) + x) - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2(g(x) + x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (xg(x) + x^2) = 0g(0) + 0 = 0$$

διότι η  $g$  είναι συνεχής.

και

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\eta\mu x + \varepsilon\phi x - \kappa x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{2\eta\mu x}{x} + \frac{\eta\mu x}{x} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} - \kappa \right) = 2 + 1 - \kappa = 3 - \kappa$$

Συνεπώς

$$3 - \kappa = 0 \Leftrightarrow \kappa = 3$$

**Δ3.**

i) Στο διάστημα  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$  είναι  $f(x) = 2\eta\mu x + \epsilon\phi x - 3x$ , παραγωγίσιμη στο  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  με

$$f'(x) = 2\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 3 = \frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x - 3\sigma\upsilon\nu^2 x + 1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{(\sigma\upsilon\nu x - 1)^2 (2\sigma\upsilon\nu x + 1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} > 0, \text{ άρα η συνάρτηση}$$

$f$  ως συνεχής στο  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$  είναι γνησίως αύξουσα. Έτσι :

Για κάθε  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$  :  $x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(0) = 0$  (οεδ)

ii) Είναι  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (2\eta\mu x + \epsilon\phi x - 3x) = +\infty$ , γιατί :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{2} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} 3x = \frac{3\pi}{2} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\epsilon\phi x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left( \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \right) = +\infty, \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{2} = 1 > 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \sigma\upsilon\nu x = 0 \quad \text{και} \quad \sigma\upsilon\nu x > 0 \text{ για κάθε } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Έτσι, αφού  $f$  συνεχής και γνησίως αύξουσα στο  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ , θα είναι

$$f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right)\right) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x)\right) = [0, +\infty). \text{ Τέλος,}$$

$$\frac{\pi}{3} \in [0, +\infty) = f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right)\right), \text{ άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον } x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ τέτοιο ώστε } f(x_2) = \frac{\pi}{3}, \text{ το}$$

οποίο είναι μοναδικό επειδή η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα. (οεδ)

**Δ4.**

i) Η συνάρτηση  $h(x) = g(x) + x$ ,  $x \in [x_1, 0]$ , είναι παραγωγίσιμη με  $h'(x) = g'(x) + 1$  που είναι συνεχής και μη μηδενιζόμενη στο  $(x_1, 0)$ , αφού  $g'(x) \neq -1$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα  $(x_1, 0)$ .

Αν είναι  $h'(x) < 0$ , για κάθε  $x \in (x_1, 0)$ , τότε  $h$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[x_1, 0]$ . Έτσι :

$$x_1 < 0 \Rightarrow h(x_1) > h(0) \stackrel{\Delta 1}{\Rightarrow} 0 > g(0), \text{ που είναι άτοπο, αφού } 0 < g(x) < 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Άρα είναι  $h'(x) > 0$ , οπότε  $h$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[x_1, 0]$  και έτσι :

$$x_1 \leq x \leq 0 \stackrel{h'}{\Rightarrow} h(x_1) \leq h(x) \leq h(0) \Rightarrow 0 \leq g(x) + x \leq g(0). \text{ Αλλά :}$$

Στο διάστημα  $[x_1, 0]$  είναι  $f(x) = x^2 h(x) \geq 0$  και αφού  $f(0) = 0$ , τελικά είναι  $f(x) \geq 0$ , για κάθε  $x \in [x_1, 0]$ , όπως θέλαμε.

ii) Το χωρίο που περιγράφεται στην εκφώνηση είναι το

$$E(\Omega) = \int_{x_1}^{f(x_2)} |f(x)| dx = \int_{x_1}^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx$$

$$\Deltaίνεται \text{ ότι } \int_{x_1}^0 f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx \Leftrightarrow I_1 = I_2 \quad (1)$$

$$I_1 = \int_{x_1}^0 f(x) dx = \int_{x_1}^0 x^2 (g(x) + x) dx = \int_{x_1}^0 x^2 g(x) dx + \int_{x_1}^0 x^3 dx \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^0 x^2 g(x) dx &= \int_{x_1}^0 \left( \frac{x^3}{3} \right)' g(x) dx = \left[ \frac{x^3}{3} g(x) \right]_{x_1}^0 - \int_{x_1}^0 \frac{x^3}{3} g'(x) dx = \\ &= 0 - \frac{x_1^3}{3} g(x_1) - \int_{x_1}^0 \frac{x^3}{3} g'(x) dx \stackrel{\Delta 1}{=} -\frac{x_1^3}{3} (-x_1) - \int_{x_1}^0 \frac{x^3}{3} g'(x) dx = \frac{x_1^4}{3} - \int_{x_1}^0 \frac{x^3}{3} g'(x) dx \end{aligned}$$

και

$$\int_{x_1}^0 x^3 dx = \left[ \frac{x^4}{4} \right]_{x_1}^0 = -\frac{x_1^4}{4}$$

Άρα από τη σχέση (2)

$$I_1 = \frac{x_1^4}{3} - \int_{x_1}^0 \frac{x^3}{3} g'(x) dx - \frac{x_1^4}{4} = -\int_{x_1}^0 \frac{x^3}{3} g'(x) dx + \frac{x_1^4}{12} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\eta\mu x + \epsilon\phi x - 3x) dx = \left[ -2\sigma\upsilon\nu x - \ln(\sigma\upsilon\nu x) - \frac{3x^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \\ &= -2\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} - \ln\left(\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3}\right) - \frac{3\left(\frac{\pi}{3}\right)^2}{2} + 2\sigma\upsilon\nu 0 + \ln(\sigma\upsilon\nu 0) = \\ &= -1 - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{\pi^2}{6} + 2 = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} \quad (4) \end{aligned}$$

Από τη σχέση (1), εξ' αιτίας των (3) και (4) έχουμε :

$$-\int_{x_1}^0 \frac{x^3}{3} g'(x) dx + \frac{x_1^4}{12} = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3} \int_{x_1}^0 x^3 g'(x) dx = -\frac{x_1^4}{12} + 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{x_1}^0 x^3 g'(x) dx = \frac{x_1^4}{4} - 3 - 3 \ln 2 + \frac{\pi^2}{2}$$