ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2024

ΜΑΘΗΜΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ’ ΓΕΛ

ΩΡΑ ΑΝΑΡΤΗΣΗΣ

12:45

φροντιστήρια πουκαμισάς
Ο ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΟΣ ΟΜΙΛΟΣ ΣΤΗΝ ΕΛΛΑΔΑ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ:	4/6/2024
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:	**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ’ ΓΕΛ**

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α.1. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 76

Α.2. Ορισμός, σχολικό βιβλίο σελ. 155

Α.3. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 216

Α.4. α) Σ β) Σ γ) Λ δ) Λ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β.1. $g:[1,+\infty)\to$ με τύπο $g(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$h:[1,+\infty)\to$ με τύπο $h(x)=\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$D_g=[1,+\infty)$ και $D_h=[1,+\infty)$

$D_{g\cap h}=D_g\cap D_h=[1,+\infty)\quad[1,+\infty)=[1,+\infty)$

Για την συνάρτηση $f=\dfrac{g}{h}$.

$$h(x)\neq 0\Leftrightarrow \sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\neq 0\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}^2-1}{\sqrt{x}}\neq 0\Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x}}\neq 0\Leftrightarrow x\neq 1\quad 0\Leftrightarrow x\quad 1$$

$$D_f=D_{\frac{g}{h}}=\left\{x\in D_{g\cap h}:h(x)\neq 0\right\}=\left\{x\in[1,+\infty):x\neq 1\right\}=(1,+\infty)$$

$$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}=\frac{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}}=\frac{\frac{\sqrt{x}^2+1}{\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x}^2-1}{\sqrt{x}}}=\frac{\frac{x+1}{\sqrt{x}}}{\frac{x-1}{\sqrt{x}}}=\frac{\sqrt{x}(x+1)}{\sqrt{x}(x-1)}=\frac{x+1}{x-1},\ x>1$$

Για την συνάρτηση $r = g \cdot h$.

$$D_r = D_{g\cdot h} = \left\{x \in D_{g\cap h}\right\} = \left\{x \in [1,+\infty)\right\} = [1,+\infty)$$

$$r(x) = g(x)\cdot h(x) = \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \left(\sqrt{x}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = x - \frac{1}{x},\ x \geq 1$$

B.2. Έχουμε $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ με $D_f = (1,+\infty)$

Η f είναι συνεχής στο $D_f = (1,+\infty)$ ως ρητή με

$$f'(x) = \frac{(x+1)'(x-1)-(x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $D_f = (1,+\infty)$ άρα f 1-1 άρα αντιστρέφεται

Έχουμε λοιπόν

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} = y \Leftrightarrow x+1 = yx - y \Leftrightarrow yx - x = y+1 \Leftrightarrow x(y-1) = y+1$$

$$\overset{y\neq 1}{\Leftrightarrow} x = \frac{y+1}{y-1} \overset{x=f^{-1}(y)}{\Leftrightarrow} f^{-1}(y) = \frac{y+1}{y-1} \overset{y\to x}{\Leftrightarrow} f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

$x \in A_f$ άρα $x > 1$

$$\Rightarrow \frac{x+1}{x-1} > 1 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1-x+1}{x-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x-1} > 0 \Leftrightarrow x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

Άρα $f(A) = A_{f^{-1}} = (1,+\infty)$

Β' τρόπος για σύνολο τιμών

Αφού f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $D_f = (1,+\infty)$ ισχύει:

$$f(D_f) = \left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to 1^+} f(x)\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\frac{x+1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}(x+1)\frac{1}{x-1} = 2(+\infty) = +\infty$$

Διότι $\lim\limits_{x\to 1^+} x-1 = 0$ και $x-1 > 0$ κοντά στο 1^+ άρα $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x-1} = +\infty$

Τελικά $f^{-1}(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ με $D_{f^{-1}}=f(D_f)=(1,+\infty)$.

Άρα $f=f^{-1}$.

Β.3. Έχουμε $r(x)=x-\dfrac{1}{x}$ $D_r=[1,+\infty)$

Κατακόρυφες ασύμπτωτες δεν έχει διότι είναι συνεχής στο $D_r=[1,+\infty)$

Πλάγια ασύμπτωτη της C_r καθώς $x\to+\infty$

$$\lambda=\lim_{x\to+\infty}\frac{r(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}1-\frac{1}{x^2}=1-0=1$$

$$\kappa=\lim_{x\to+\infty}\left(r(x)-1\cdot x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{1}{x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0$$

Άρα η πλάγια ασύμπτωτη της συνάρτησης r στο $+\infty$ είναι η ευθεία με εξίσωση $y=1x+0\Leftrightarrow y=x$

Β' τρόπος

$$r(x)=x-\frac{1}{x}\Leftrightarrow r(x)-x=-\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(r(x)-x\right)=0$$

Άρα από ορισμό η ευθεία $y=x$ πλάγια ασύμπτωτη της συνάρτησης r στο $+\infty$.

Β.4. $f^{-1}(f(x))=x$ για κάθε $x\in A_f=(1,+\infty)$ άρα η εξίσωση γίνεται $(\mathrm{E})\ \left(f^{-1}(f(x))\right)^2=1+4\cdot r(x)$

$$\left(f^{-1}(f(x))\right)^2=1+4\cdot r(x)\Leftrightarrow x^2=1+4\left(x-\frac{1}{x}\right)\Leftrightarrow x^2=1+4x-\frac{4}{x}\overset{x\neq0}{\Leftrightarrow}x^3=x+4x^2-x\cdot\frac{4}{x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3-4x^2-x+4=0\Leftrightarrow x^2(x-4)-(x-4)=0\Leftrightarrow(x-4)(x^2-1)=0$$

Άρα $(x-4)(x^2-1)=0\left\langle\begin{array}{l}x-4=0\Leftrightarrow x=4\\ \quad ή\\ x^2-1=0\Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=-1\end{array}\right.$

Η λύση $x=4$ είναι δεκτή ενώ οι λύσεις $x=1$ και $x=-1$ απορρίπτονται αφού $x\in(1,+\infty)$.

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

$$f(x)=\begin{cases} -2x+4+e^{\lambda} & , \ 0\le x<2 \\ -x^2+4x-3+\lambda, & x\ge 2 \end{cases}, \quad \lambda\in$$

Γ.1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,2)$ ως πολυωνυμική.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(2,+\infty)$ ως πολυωνυμική.

Αφού η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ θα είναι συνεχής και στο $x_0=2$ άρα θα ισχύει:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2) \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(-2x+4+e^{\lambda}\right)=-2\cdot 2+4+e^{\lambda}=-4+4+e^{\lambda}=e^{\lambda} \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(-x^2+4x-3+\lambda\right)=-2^2+4\cdot 2-3+\lambda=-4+8-3+\lambda=1+\lambda=f(2) \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{\lambda}=\lambda+1\Leftrightarrow e^{\lambda}-\lambda-1=0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=e^x-x-1,\ x\in$.

$$g'(x)=\left(e^x-x-1\right)'=e^x-1,\ x\in[0,+\infty)$$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow e^x-1=0\Leftrightarrow e^x=1\Leftrightarrow e^x=e^0\overset{e^x\ \text{1-1}}{\Leftrightarrow} x=0$$

$$g'(x)>0\Leftrightarrow e^x-1>0\Leftrightarrow e^x>1\Leftrightarrow e^x>e^0\overset{e^x\,\uparrow}{\Leftrightarrow} x>0$$

$$g'(x)<0\Leftrightarrow e^x-1<0\Leftrightarrow e^x<1\Leftrightarrow e^x<e^0\overset{e^x\,\uparrow}{\Leftrightarrow} x<0$$

$$g(0)=e^0-0-1=1-1=0$$

Άρα ισχύει $g(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Άρα η εξίσωση $g(x)=0$ έχει ακριβώς μία ρίζα την $x=0$. Άρα $\lambda=0$.

Γ.2. Έχουμε

$$f(x)=\begin{cases} -2x+4+e^{\lambda}, & 0\le x<2 \\ -x^2+4x-3, & x\ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow f(x)=\begin{cases} -2x+4+1, & 0\le x<2 \\ -x^2+4x-3, & x\ge 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\begin{cases} -2x+5, & 0\le x<2 \\ -x^2+4x-3, & x\ge 2 \end{cases}$$

Για $0\le x<2$ η f είναι συνεχής με $f'(x)=-2<0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,2)$

Για $x\ge 2$ η f είναι συνεχής με $f'(x)=-2x+4<0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[2,+\infty)$

Για $A_1 = [0, 2)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα άρα

$$f(A_1) = \left(\lim_{x\to 2^-} f(x), f(0)\right] = (1, 5] \text{ διότι}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(-2x+5) = -2\cdot 2+5 = -4+5 = 1$$

$$f(0) = -2\cdot 0 + 5 = 5$$

Για $A_2 = [2, +\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα άρα

$$f(A_2) = \left(\lim_{x\to +\infty} f(x), f(2)\right] = (-\infty, 1] \text{ διότι}$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(-x^2+4x-3\right) = \lim_{x\to +\infty}\left(-x^2\right) = -(+\infty) = -\infty$$

$$f(2) = -2^2 + 4\cdot 2 - 3 = -4 + 8 - 3 = 1$$

Επομένως $f(D_f) = f(A_1) \cup f(A_2) = (1, 5] \cup (-\infty, 1] = (-\infty, 5]$

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $D_f = [0, +\infty)$ επομένως δεν παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 = 2$.

Άρα η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = 0$ το $f(0) = 5$.

Γ.3. i) $f(x) = \begin{cases} -2x+4+1, & 0 \le x < 2 \\ -x^2+4x-3, & x \ge 2 \end{cases}$ ή $f(x) = \begin{cases} -2x+5, & 0 \le x < 2 \\ -x^2+4x-3, & x \ge 2 \end{cases}$

Η f είναι συνεχής στο $[0, 3]$ αφού η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 2) \cup (2, 3)$ ως πολυωνυμική.

Εξετάζουμε στο $x_0 = 2$.

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-2x+5-1}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-2x+4}{x-2} = -2\lim_{x\to 2^-} \frac{x-2}{x-2} = -2$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{-x^2+4x-3-1}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{-x^2+4x-4}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{-(x-2)^2}{x-2} = -\lim_{x\to 2^+}(x-2) = 0$$

Αφού $\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \ne \lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$.

Άρα η συνάρτηση δεν ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο διάστημα $[0, 3]$.

ii) Αναζητούμε $\xi \in (0, 3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \lambda_{ΔΕ} = \dfrac{f(3)-f(0)}{3-0} = \dfrac{-9+12-3-5}{3} = -\dfrac{5}{3}$

και $f'(x)=\begin{cases}-2 & ,\ 0\le x<2\\ -2x+4 & ,\ x\ge 2\end{cases}$

Για $0\le x<2$ έχουμε: $-2=-\frac{5}{3}$ αδύνατη

Για $x>2$ έχουμε: $-2x+4=-\frac{5}{3}\Leftrightarrow 2x=4+\frac{5}{3}\Leftrightarrow 2x=\frac{17}{3}\Leftrightarrow x=\frac{17}{6}$ δεκτή αφού $\frac{17}{6}\in(2,\ 3)$.

Γ.4. Για $t=t_0$ το σημείο Μ κινούμενο κατακόρυφα προς τα πάνω θα συναντήσει την C_f στην κορυφή της παραβολής $\mathrm{B}(2,1)$ οπότε $\mathrm{M}(x(t_0),y(t_0))$ γίνεται $\mathrm{M}(2,1)$ άρα $x(t_0)=2$ και $y(t_0)=1$

$$\varepsilon\varphi\omega=\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AO}}=\frac{y}{2}\ \text{άρα}\ \varepsilon\varphi(\omega(t))=\frac{y(t)}{2}$$

$$\left(\varepsilon\varphi(\omega(t))\right)'=\frac{1}{2}y'(t)\Leftrightarrow\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega(t)}\cdot\omega'(t)=\frac{1}{2}y'(t)\Leftrightarrow\omega'(t)=\frac{1}{2}y'(t)\,\sigma\upsilon\nu^2\omega(t)$$

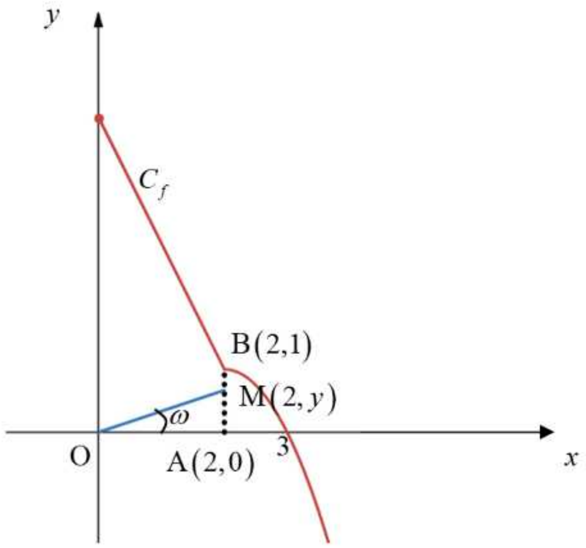
Για $t=t_0$

$$(\mathrm{OB})^2=(\mathrm{AB})^2+(\mathrm{OA})^2\Leftrightarrow(\mathrm{OB})^2=1+4\Leftrightarrow(\mathrm{OB})^2=5\Leftrightarrow(\mathrm{OB})=\sqrt{5}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega(t_0)=\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

Για $t=t_0$

$$\omega'(t_0)=\frac{1}{2}y'(t_0)\,\sigma\upsilon\nu^2\omega(t_0)=\frac{1}{2}y'(t_0)\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2=\frac{2}{5}y'(t_0)=\frac{2}{5}\cdot 0,5=\frac{1}{5}\,rad/\sec$$



ΘΕΜΑ Δ

Δ.1. $f(x)=\frac{\ln x}{x}+\alpha,\ x\in(0,+\infty)$

$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2},\ x\in(0,+\infty)$

$f'(x)\ge 0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln x}{x^2}\ge 0 \overset{x^2>0}{\Leftrightarrow} 1-\ln x\ge 0 \Leftrightarrow \ln x\le 1 \Leftrightarrow 0< x\le e$

$f'(x)\le 0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln x}{x^2}\le 0 \overset{x^2>0}{\Leftrightarrow} 1-\ln x\le 0 \Leftrightarrow \ln x\ge 1 \Leftrightarrow x\ge e$

Οι ρίζες και το πρόσημο της $f'(x)$ καθώς και τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	0		e		$+\infty$
$f'(x)$			$+$	0	$-$	
f			$\nearrow$	ΟΛ.ΜΕΓ.	$\searrow$	

$f(e)=\frac{1}{e}+\alpha$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln x}{x}+\alpha\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\cdot\ln x+\alpha\right)=-\infty$ γιατί

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}+\alpha\right)\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{(\ln x)'}{(x)'}+\alpha\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+\alpha\right)=\alpha$ γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

- Στο διάστημα $\Delta_1=(0,e]$ η f είναι συνεχής και 1

Άρα $f(\Delta_1)=\left(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x), f(e)\right]=\left(-\infty,\frac{1}{e}+\alpha\right]$

- Στο διάστημα $\Delta_2=[e,+\infty)$ η f είναι συνεχής και 2

Άρα $f(\Delta_2)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), f(e)\right]=\left(\alpha,\frac{1}{e}+\alpha\right]$

$f\left((0,+\infty)\right)=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)=\left(-\infty,\frac{1}{e}+\alpha\right]$

Άρα $\frac{1}{e}+\alpha=\frac{1}{e}+1\Leftrightarrow\alpha=1$, άρα $f(x)=\frac{\ln x+x}{x},\ x>0$

Δ.2. Έχουμε $f\left((0,e]\right)=\left(-\infty\ ,\frac{1}{e}+1\right]$

$0\in f\left((0,e]\right)$ άρα υπάρχει $x_0\in(0,e)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$

Επειδή η f γνησίως αύξουσα στο $(0,e]$ το x_0 είναι μοναδικό

Ακόμα $f\left(\frac{1}{2}\right)=\dfrac{\ln\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{-\ln 2+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=-\ln 4+1=-\ln 4+\ln e<0$

$f(1)=1>0$

Έτσι $f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot f(1)<0$ άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.

$f\left([e,+\infty)\right)=\left(1,1+\frac{1}{e}\right]$

$0\notin f\left([e,+\infty)\right)$ άρα η f δεν έχει ρίζα στο $[e,+\infty)$

Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα x_0, η οποία ανήκει στο διάστημα $\left(\frac{1}{2},1\right)$.

Δ.3. i)

x	$-\infty$	0		e		$+\infty$
$h'(x)$		‖	$+$	0	$-$	
h		‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}+1$	$\searrow$	1

Θεωρούμε τη συνάρτηση h με $h(x)=f(x)-f(4)$, $x\in(0,+\infty)$ και $h(4)=0$

$h'(x)=f'(x)$ άρα η $h(x)$ έχει την ίδια μονοτονία με την f

$h(2)=f(2)-f(4)=\dfrac{\ln 2+1}{2}-\dfrac{\ln 4+1}{4}=\dfrac{2(\ln 2+1)-2\ln 2-1}{4}=0$

Στο διάστημα $(0,e]$ η $h(x)$ είναι γνησίως αύξουσα και $h(2)=0$ άρα το $x_1=2$ είναι η μοναδική της ρίζα.

Στο διάστημα $[e,+\infty)$ η $h(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα και $h(4)=0$ άρα το $x_2=4$ είναι η μοναδική της ρίζα.

ii) Με $x>0$ έχουμε:

$$2^x \le x^2 \overset{\ln x\ \uparrow}{\Leftrightarrow} \ln 2^x \le \ln x^2 \Leftrightarrow x\ln 2 \le 2\ln x \Leftrightarrow \frac{\ln 2}{2} \le \frac{\ln x}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln x}{x}+1 \ge \frac{\ln 2}{2}+1 \Leftrightarrow f(x) \ge f(2)$$

Όμως $f(2)=f(4)$

$f(x)\ge f(2)$ και f γνησίως αύξουσα στο $(0,e]$ άρα $x\ge 2$

$f(x)\ge f(4)$ και f γνησίως φθίνουσα στο $[e,+\infty)$ άρα $x\le 4$

Αν $0<x<2<e \overset{f\uparrow\ \text{στο}\ (0,e]}{\Rightarrow} f(x)<f(2)$

Αν $x>4>e \overset{f\downarrow\ \text{στο}\ [e,+\infty)}{\Rightarrow} f(x)<f(4)$

Άρα τελικά $2\le x\le 4$.

Δ.4.

$$\mathrm{E}=\int_{-\ln 2}^{0}|g(x)|dx=\int_{-\ln 2}^{0}\left|f\left(e^x\right)\frac{1-x}{e^x}\right|dx=\int_{-\ln 2}^{0}\left|f\left(e^x\right)\right|\frac{1-x}{e^x}\,dx$$

Γιατί $-\ln 2\le x\le 0$ άρα $1-x>0$ και $e^x>0$

Θέτω $u=e^x \Leftrightarrow x=\ln u$ άρα $dx=\frac{1}{u}du$

Αλλαγή άκρων: $x=-\ln 2 \Leftrightarrow u=e^{-\ln 2}=\frac{1}{e^{\ln 2}}=\frac{1}{2}$ και $x=0 \Leftrightarrow u=e^0=1$

Άρα

$$\mathrm{E}=\int_{\frac{1}{2}}^{1}|f(u)|\frac{1-\ln u}{u}\cdot\frac{1}{u}du=\int_{\frac{1}{2}}^{1}|f(u)|\frac{1-\ln u}{u^2}du=\int_{\frac{1}{2}}^{1}|f(u)|f'(u)du=$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{x_0}|f(u)|f'(u)du+\int_{x_0}^{1}|f(u)|f'(u)du$$

Όπου x_0 η ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

Αν $0<\frac{1}{2}\le x\le x_0<1<e \overset{f\uparrow\ \text{στο}\ (0,e]}{\Rightarrow} f(x)\le f(x_0)=0$

Αν $x_0\le x\le 1 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x)\ge f(x_0)=0$

Άρα

$$E=-\int_{\frac{1}{2}}^{x_0} f(u)f'(u)du+\int_{x_0}^{1} f(u)f'(u)du=-\frac{1}{2}\left[f^2(u)\right]_{\frac{1}{2}}^{x_0}+\frac{1}{2}\left[f^2(u)\right]_{x_0}^{1}=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(f^2(x_0)-f^2\left(\frac{1}{2}\right)\right)+\frac{1}{2}\left(f^2(1)-f^2(x_0)\right)\overset{(*)}{=}\frac{1}{2}f^2\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=\frac{f^2\left(\frac{1}{2}\right)+1}{2}=$$

$$=\frac{(-2\ln 2+1)^2+1}{2}=\frac{4\ln^2 2-4\ln 2+1+1}{2}=\left(2\ln^2 2-2\ln 2+1\right)\ \tau\mu$$

$(*)\ f(x_0)=0,\ f(1)=1$

Με $f\left(\frac{1}{2}\right)=\dfrac{\ln\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=-2\ln 2+1$