ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό σελίδα **76** (Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών)
Α2. Σχολικό σελίδα **155** (Ορισμός κυρτής συνάρτησης)
Α3. Σχολικό σελίδα **216** (Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού)

Α4.
α)σωστό
β)σωστό
γ)λάθος
δ)λάθος
ε)σωστό

ΘΕΜΑ Β

ΘΕΜΑ Β

$g: [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ $\quad h: (1, +\infty) \to \mathbb{R}$

$g(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad h(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

B1). • $D_{\frac{g}{h}} = D_g \cap D_h - \{x \mid h(x) = 0\}$

$D_g \cap D_h = [1, +\infty)$

$h(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow$

$(\sqrt{x})^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ Άρα $D_{\frac{g}{h}} = (1, +\infty)$

και $\left(\frac{g}{h}\right)(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\frac{x+1}{\sqrt{x}}}{\frac{x-1}{\sqrt{x}}} = \frac{x+1}{x-1}$

• $D_{g \cdot h} = D_g \cap D_h = [1, +\infty)$

$(g \cdot h)(x) = g(x)\, h(x) = (\sqrt{x})^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = x - \frac{1}{x}$

$f(x) = \frac{x+1}{x-1},\ x > 1$ $\quad r(x) = x - \frac{1}{x},\ x \geq 1$

B2) $f'(x) = \frac{(x+1)'(x-1) - (x+1)\cdot(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{\cancel{x} - 1 - \cancel{x} - 1}{(x-1)^2}$

$= \frac{-2}{(x-1)^2} < 0$ άρα η $f \downarrow$ αντιστρέφεται

$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} = y \Leftrightarrow x + 1 = yx - y \Leftrightarrow x - yx = -y - 1$

$x(1-y) = -y - 1$

$x = \frac{-y-1}{1-y} = \frac{-(y+1)}{-(y-1)} = \frac{y+1}{y-1},\ y \neq 1$

$x>1$

$\frac{y+1}{y-1}>1 \Leftrightarrow \frac{y+1}{y-1}-1>0 \Leftrightarrow \frac{\cancel{y}+1-\cancel{y}+1}{y-1}>0$

$\frac{2}{y-1}>0$ άρα $y-1>0 \Leftrightarrow y>1$

Άρα $f^{-1}(y)=\frac{y+1}{y-1},\ y>1$ ή

$f^{-1}(x)=\frac{x+1}{x-1},\ x>1$

Επειδή $D_f=D_{f^{-1}}$ και $f(x)=f^{-1}(x)$ άρα

ίσες.

B3) $\Gamma(x)=x-\frac{1}{x},\ x\geq 1$

ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ

$\lim_{x\to+\infty}\Gamma(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{1}{x}\right)=+\infty$ δεν έχει

ΠΛΑΓΙΑ

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\Gamma(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x^2}=1=\lambda$

$\lim_{x\to+\infty}(\Gamma(x)-\lambda x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\cancel{x}-\frac{1}{x}-\cancel{x}\right)=0=\beta$

άρα η $\varepsilon: y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

B4) $\left(f^{-1}(f(x))\right)^2 = 1 + 4r(x)$ $\quad x>1$

$$x^2 = 1 + 4\left(x - \frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow$$

$x^2 - 1 = 4x - \frac{4}{x} \Leftrightarrow x^2 - 1 = \frac{4x^2-4}{x} \Leftrightarrow$

$x^3 - x = 4x^2 - 4 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$x^2(x-4) - (x-4) = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow$

$x=4$ ή $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Αλλά $x>1$ άρα $x=4$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Θέμα Γ

$$f(x) = \begin{cases} -2x+4+e^{\lambda}, & 0 \le x < 2 \\ -x^2+4x-3+\lambda, & x \ge 2 \end{cases}$$

Γ1) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}(-2x+4+e^{\lambda}) = -2\cdot 2+4+e^{\lambda} = e^{\lambda}$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}(-x^2+4x-3+\lambda) = -2^2+4\cdot 2-3+\lambda = \lambda+1$.

f συνεχής άρα $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \Rightarrow e^{\lambda} = \lambda+1$

και επειδή ισχύει $e^x \ge x+1$ για $x\in\mathbb{R}$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0 \Rightarrow \boxed{\lambda=0}$

Γ2.

Γ2) Για $\lambda=0$:

$$f(x)=\begin{cases}-2x+4+1, & 0\le x<2\\ -x^2+4x-3, & x\ge 2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x)=\begin{cases}-2x+5, & 0\le x<2\\ -x^2+4x-3, & x\ge 2\end{cases}$$

Για $0\le x<2$ η f παραγωγίσιμη με $f'(x)=-2<0$

Για $x\ge 2$ η f παραγωγίσιμη με $f'(x)=-2x+4<0$

Και η f συνεχής στο $x_0=2$

Άρα η f γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$

Εφόσον $D_f=[0,+\infty)$, πιθανή θέση τοπικού ακροτάτου είναι το άκρο του πεδίου ορισμού της

Άρα στο $x_0=0$ η f παρουσιάζει μέγιστο το $f(0)=5$.

Γ3.i.

Γ3) i) η f συνεχής στο $[0,3]$

η f παραγωγίσιμη στο $(0,3)$

Θ.ε. αν είναι στο $x_0=2$:

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{-x^2+4x-3-1}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{-x^2+4x-4}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{-(x^2-4x+4)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{-(x-2)^{\cancel{2}}}{\cancel{x-2}}=0$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-2x+5-1}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-2x+4}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-2(x-2)}{x-2}=-2$$

Άρα δεν ισχύει το Θ.Μ.Τ.

Γ3.ii.

Γ3) ii) Για να είναι παράλληλη η εφαπτομένη ε της f στο $\Gamma(\xi, f(\xi))$ στην ευθεία που διέρχεται από τα $\Delta(0, f(0))$ και $E(3, f(3))$ πρέπει $\lambda_\varepsilon = \frac{f(3)-f(0)}{3-0} = -\frac{5}{3}$

Αν $x<2$ $f'(x) = -2 \neq -\frac{5}{3}$ άρα δεν υπάρχει τέτοιο ξ.

Αν $x>2$ $f'(x) = -2x+4$

Λύνω $f'(\xi) = -\frac{5}{3} \Rightarrow -2\cdot\xi + 4 = -\frac{5}{3} \Rightarrow \xi = \frac{17}{6}$

Άρα για $\xi = \frac{17}{6}$ οι ευθείες είναι παράλληλες.

Γ4.

Γ4) $\varepsilon\varphi\theta(t) = \frac{y(t)}{2}$

$$\frac{\theta'(t)}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)} = \frac{1}{2}y'(t)$$

για $\underline{t=t_0}$: $\frac{\theta'(t_0)}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t_0)} = \frac{1}{2}y'(t_0) \Leftrightarrow$

$$\frac{\theta'(t_0)}{\frac{20}{25}} = \frac{1}{2}\cdot 0{,}5 \Leftrightarrow \underline{\theta'(t_0) = 0{,}2\,rad/sec}$$

για $\underline{t=t_0}$: $\sigma\upsilon\nu\theta(t_0) = \frac{OA}{OM} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1.

Θέμα Δ

Δ1) Η f είναι συνεχής ως πράξη συνεχών συναρτήσεων

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x}+a\right)x - \ln x - ax}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow$

$\frac{1-\ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow$

$1-\ln x = 0 \Leftrightarrow$

$x = e$

x	0		e		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	M	$\searrow$	

Η f έχει μέγιστο στο $x_0=e$

άρα $f(e) = 1+\frac{1}{e} \Leftrightarrow$

$\frac{\ln e + ae}{e} = \frac{1}{e}+\frac{1}{e} \Leftrightarrow$

$\frac{1}{e} + a = 1+\frac{1}{e} \Leftrightarrow$

$a=1$

Δ2.

Δ2) $f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{\ln x + x}{x}=0 \Leftrightarrow \ln x + x = 0$

Θεωρώ $\phi(x)=\ln x + x$, $x>0$

$\phi'(x)=\frac{1}{x}+x>0 \Rightarrow$ ϕ γνησίως αύξουσα

Η ϕ συνεχής στο $\left[\frac{1}{2},1\right]$ ως πράξη συνεχών συναρτήσεων

$\phi(1)=\ln 1 + 1 = 1 > 0$

$\phi\left(\frac{1}{2}\right)=\ln\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=-\ln 2+\frac{1}{2}<0$ διότι $e<4 \Leftrightarrow \sqrt{e}<\sqrt{4} \Leftrightarrow \sqrt{e}<2 \Leftrightarrow$

$e^{\frac{1}{2}}<2 \Leftrightarrow \ln e^{\frac{1}{2}}<\ln 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}<\ln 2 \Leftrightarrow$

$\frac{1}{2}-\ln 2<0$

άρα $\phi(1)\phi\left(\frac{1}{2}\right)<0$

οπότε από Θ. Bolzano υπάρχει $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$

τέτοιο ώστε $\phi(x_0)=0$ ή η εξίσωση $f(x)=0$

έχει ως λύση την x_0, επειδή η f ↑ η λύση

είναι μοναδική.

Δ3.i.

Δ3) i) $f(x)=f(4)$

Για $x=4$ έχω $f(4)=f(4)$ άρα το $x_2=4$ λύση

Για $x=2$ έχω $f(2)=f(4) \Leftrightarrow$

$$\frac{\ln 2+2}{2}=\frac{\ln 4+4}{4} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\ln 2+2}{2}=\frac{2\ln 2+4}{4} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\ln 2+2}{2}=\frac{2(\ln 2+2)}{4} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\ln 2+2}{2}=\frac{\ln 2+2}{2}$$ άρα το $x_1=2$ λύση.

Θεωρώ $A_1=(0,1]$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$, $f(1)=1+\frac{1}{e}$ άρα $f(A_1)=(-\infty,1+\frac{1}{e}]$

Το $\frac{\ln 2+2}{2}=\frac{\ln 2}{2}+1 \in f(A_1)$ και η $f \uparrow$ στο A_1

άρα μοναδική λύση στο A_1.

$A_2=(1,+\infty)$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1+\frac{1}{e}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x+x}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{x}+1=1$ άρα $f(A_2)=(1,1+\frac{1}{e})$

Το $\frac{\ln 2}{2}+1 \in (1,1+\frac{1}{2})$ άρα μοναδική λύση στο A_2

οπότε $x_1=2$ και $x_2=4$ μοναδικές λύσεις της $f(x)=f(4)$

ii.

Δ3) ii) Έχω $2^x \le x^2 \Leftrightarrow \ln 2^x \le \ln x^2 \Leftrightarrow x\ln 2 \le 2\ln x \overset{x>0}{\Leftrightarrow}$

$\frac{\ln 2}{2} \le \frac{\ln x}{x} \Leftrightarrow \frac{\ln 2}{2}+1 \le \frac{\ln x}{x}+1 \Leftrightarrow \frac{\ln 2}{2}+1 \le \frac{\ln x + x}{x} \Leftrightarrow$

$\frac{\ln 2}{2}+1 \le f(x)$

Αν $x\in(0,e)$ τότε $\frac{\ln 2}{2}+1 \le f(x) \Leftrightarrow f(2)\le f(x) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} 2\le x<e$

Αν $x\in[e,+\infty)$ τότε $\frac{\ln 2}{2}+1 \le f(x) \Leftrightarrow f(4)\le f(x) \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} e\le x\le 4$

άρα $x\in[2,4]$

Δ4.

Δ4.

$$E(\Omega) = \int_{-\ln 2}^{0} |g(x)|\, dx$$

Θέτω $e^x = \omega \Rightarrow x = \ln\omega$, $\omega_1 = \frac{1}{2}$, $\omega_2 = 1$

άρα $E(\Omega) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left| f(\omega) \frac{1-\ln\omega}{\omega} \right| d\omega = \int_{\frac{1}{2}}^{1} | f(\omega) f'(\omega) |\, d\omega$

Η $f \uparrow$ στο $[\frac{1}{2}, 1]$ και έχει ρίζα το x_0

άρα $E(\Omega) = -\int_{\frac{1}{2}}^{x_0} f(\omega) f'(\omega)\, d\omega + \int_{x_0}^{1} f(\omega) \cdot f'(\omega)\, d\omega$.

άρα $E(\Omega) = -\frac{1}{2} \left(f^2(x_0) - f^2(\frac{1}{2}) \right) + \frac{1}{2} \left[f^2(1) - f^2(x_0) \right]$

όμως $f(x_0) = 0$

άρα $E(\Omega) = \frac{1}{2} f^2(\frac{1}{2}) + \frac{1}{2} f^2(1) =$

$= 2\ln^2 2 - 2\ln 2 + 1.$

Επιμέλεια:
Φώτης Πόντικας
Κελλυ Παπαϊωάννου
Δημοσθένης Τσαγκούδης
Βάσω Αλεξούδη